§3.3 可测集及其测度

Thm. 若 E 和 F 是开区间，$E\cap F=\phi$，则 $m^*(E\cup F)=m^*(E)+m^*(F)$

Pf. $E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}(E\cap J_k)$，于是 $m^*(E)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\cancel{m^*}|E\cap J_k|$，同理 $m^*(F)\leq\sum_{k=1}^{\infty}|F\cap J_k|$

由 $E\cap F=\phi$，$J_k=(J_k\cap E)\cup(J_k\cap F)\cup(J_k\setminus(E\cup F))$

则 $|J_k|\geqslant|J_k\cap E|+|J_k\cap F|$

由定义，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\{J_k\}$ s.t. $E\cup F\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}J_k$ 且

$m^*(E\cup F)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|J_k|\leqslant m^*(E\cup F)+\varepsilon$

则 $m^*(E\cup F)+\varepsilon\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}|J_k\cap E|+\sum_{k=1}^{\infty}|J_k\cap F|\geqslant m^*(E)+m^*(F)$.

由 ε 任意性，$m^*(E\cup F)\geqslant m^*(E)+m^*(F)$

由次可加性，$m^*(E\cup F)\leqslant m^*(E)+m^*(F)$

于是有 $m^*(E\cup F)=m^*(E)+m^*(F)$.

Lem1. 若 E 和 F 是开区间，$E\cap F=\phi$，$E\cup F=I$，则 $m^*(I)=m^*(I\cap E)+m^*(I\cap E^c)$

Lem2. 若 E 是任意集合，$E\subset I$，$F\subset I^c$，则 $m^*(E\cup F)=m^*(E)\cup m^*(F)$

Pf. 类似地，只需要作 $m^*(E)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|I\cap J_k|$

$$m^*(F)\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}|I^c\cap J_k|$$

由 $E\cap F=\phi$，$J_k=(J_k\cap I)\cup(J_k\cap I^c)\cup(J_k\setminus(I\cup I^c))$

$$=(J_k\cap I)\cup(J_k\cap I^c)$$

则 $|J_k|=|J_k\cap I|+|J_k\cap I^c|$

Rem. 这里通过区间分割，满足了可加性.

Def. (Caratheodory 条件)

$\forall T \subset \mathbb{R}^n$, $m^*(T) = m^*(T\cap E) + m^*(T\cap E^c)$ 称为 Caratheodory 条件，其中 $E \subset \mathbb{R}^n$.

Thm. $\forall T \subset \mathbb{R}^n$，设 $F = T\setminus E$，则 $E\cup F = T$，$E\cap F = \phi$，且

$$m^*(T) = m^*(T\cap E) + m^*(T\cap E^c)$$

Pf. 先证"$\geq$"：取 $\{J_k\}$ s.t. $T \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k$，则：

$$T\cap E \subseteq E \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E\cap J_k)$$

$$T\cap E^c \subseteq E^c \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} J_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (E_c\cap J_k)$$

又有 $|J_k| = m^*(J_k) = m^*(J_k\cap E) + m^*(J_k\cap E^c)$，$\forall k$.

于是 $m^*(T\cap E) + m^*(T\cap E^c) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E\cap J_k) + \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E^c\cap J_k)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} m^*(J_k)$$

由任意性，对 $\sum_{k=1}^{\infty} m^*(J_k)$ 取下确界有：

$$m^*(T) \geq m^*(T\cap E) + m^*(T\cap E^c)$$

"$\leq$"由次可加性可知.

Def. 满足 Caratheodory 条件的集合称为 Lebesgue 可测集.

可测集全体称为可测集族，记为 $\mathcal{M}$.

Rem. (1) 由次可加性，E 可测只需证 $m^*(T) \geq m^*(T\cap E) + m^*(T\cap E^c)$

(2) 简记为 $m(E) = m^*(E)$，当 E 可测时.

$m^*: 2^{\mathbb{R}^n} \to \overline{\mathbb{R}}$ $\quad m: \mathcal{M} \to \overline{\mathbb{R}}$

即 $m = m^*|_{\mathcal{M}}$

Thm. E可测 $\Longleftrightarrow E^c$可测

Pf. 由$E=(E^c)^c$, $m^*(T)=m^*(T\cap E^c)+m^*(T\cap(E^c)^c)$
$$=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$$

Thm. $m^*(E)=0 \Rightarrow E$可测

Pf. $\forall T\subseteq \mathbb{R}^n$: 只需验证 $m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$

由单调性, $T\cap E\subseteq E$, 又有$(T\cap E)\cup(T\cap E^c)=T$

由次可加性, $m^*(T)\leq m^*(T\cap E^c)\leq m^*(T)$

Cor. 可列集是可测集 ($\mathbb{Q}$, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$是可测集)

Thm. E可测, $A\subseteq E$, $B\subseteq E^c \Longleftrightarrow m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$

Pf. $\Rightarrow$: E可测有$\Longleftrightarrow \forall T\subseteq\mathbb{R}^n$, $m^*(T)=m^*(T\cap E)+m^*(T\cap E^c)$

令$A=T\cap E$, $B=T\cap E^c$, 则 $T=A\cup B$, $A\subseteq E$, $B\subseteq E^c$

于是$m^*(A\cup B)=m^*(A)+m^*(B)$, 即 Caratheodory 条件成立

$\Leftarrow$: 设$T=A\cup B$, 由E可测,
$$m^*(T)=m^*(A\cup B)=m^*((A\cup B)\cap E)+m^*((A\cup B)\cap E^c)$$
$$=m^*(A)+m^*(B).$$

Thm. E_1, E_2可测 $\Rightarrow E_1\cup E_2$可测

Pf. 往证: $\forall T\subseteq\mathbb{R}^n$: $m^*(T)=m^*(T\cap(E_1\cup E_2))+m^*(T\cap(E_1\cup E_2)^c)$

由上有 $m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*(T\cap E_1)+m^*((T\cap E_2)\setminus E_1)$

由E_1可测, $m^*(T)=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_1^c)$

由E_2可测, $m^*(T\setminus(E_2\cup E_1))+m^*(T\cap(E_2\setminus E_1))=m^*(T\cap E_1^c)$

Cor. (1) $m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}E_i))=\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap E_i)$

(2) $m(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)=\sum_{i=1}^{n}m(E_i)$

其中 $E_1,\cdots,E_n$ 两两不交

Pf. (1) 由归纳法，$\forall T\subseteq\mathbb{R}^n$：$m^*(T\cap(E_1\cup E_2))=m^*(T\cap E_1)+m^*(T\cap E_2)$

其中 $T\cap E_1\subseteq E_1$, $T\cap E_2\subseteq E_1^c$

(2) 对于(2)，取 $T=\mathbb{R}^n$ 即可.

Thm. E_1,E_2 可测 $\Rightarrow E_1\cap E_2, E_1\setminus E_2$ 也可测

Cor. E_1,E_2 可测，当 $E_1\supset E_2$, $m(E_2)<\infty$ 时 $m(E_1\setminus E_2)=m(E_1)-m(E_2)$

Thm. $m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i))=\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)$

$m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)=\sum_{i=1}^{\infty}m(E_i)$，其中 $E_1,\cdots,E_n,\cdots$ 两两不交

Pf. 记 $F=\bigcup_{i=1}^{n}E_i$，则：

$$
\begin{aligned}
m^*(T)&=m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}E_i))+m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{n}E_i)^c)\\
&\geq\sum_{i=1}^{n}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)^c)\\
&\geqslant\sum_{i=1}^{\infty}m^*(T\cap E_i)+m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)^c)\\
&\geqslant m^*(\bigcup_{i=1}^{\infty}(T\cap E_i))+m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)^c)\\
&=m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i))+m^*(T\cap(\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i)^c)
\end{aligned}
$$

Thm. 可测集族 $\mathcal{M}$ 是 σ 代数.

Thm. 若$\{E_i\}$是一列单增可测集，则$\lim\limits_{n\to\infty} E_n$可测，且

$$m(\lim_{n\to\infty} E_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

Pf. $m(\lim\limits_{n\to\infty} E_n) = m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n)$

取$F_k = E_k \setminus E_{k-1}$, $k \geq 2$, $F_1 = E_1$，记$E_0 = \phi$.

则$m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) = m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_k) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} m(F_k)$

$$= \lim_{n\to\infty} m(\bigcup_{k=1}^{n} F_n) = \lim_{n\to\infty} m(E_n)$$

Thm. 若$\{E_i\}$是一列单减可测集，则$\lim\limits_{n\to\infty} E_n$可测，且$m(E_1) < \infty$时

有 $m(\lim\limits_{n\to\infty} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)$

Pf. 构造$F_i = E_1 \setminus E_i$，则$\{F_i\}$单增可测

于是$\lim\limits_{n\to\infty} m(F_n) = m(\lim\limits_{n\to\infty} F_n)$

又有$\lim\limits_{n\to\infty} m(E_1 \setminus E_n) = m(E_1) - \lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)$

$m(\lim\limits_{n\to\infty} (E_1 \setminus E_n)) = m(E_1 \setminus (\lim\limits_{n\to\infty} E_n)) = m(E_1) - m(\lim\limits_{n\to\infty} E_n)$

即$m(\lim\limits_{n\to\infty} E_n) = \lim\limits_{n\to\infty} m(E_n)$

Prop. E可测，$f \in \mathbb{R}(E)$, TFAE:

(1) $\forall a \in \mathbb{R}^1$, $E[f > a]$可测

(2) $\forall a \in \mathbb{R}^1$, $E[f \leq a]$可测

(3) $\forall a \in \mathbb{R}^1$, $E[f \geq a]$可测

(4) $\forall a \in \mathbb{R}^1$, $E[f < a]$可测

Pf. (1) $\Rightarrow$ (3): $E[f > a] = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} E[f \geq a - \frac{1}{k}]$,

另有$\mathbb{R}^n = E[f > a] \cup E[f < a] \cup E[f = a]$，有$E[f = a]$可测.

Prop. $\{E_i\}$可测，若$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i)<\infty$，则$m(\overline{\lim} E_i)=0$.

Pf. $m\left(\bigcap_{N=1}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\right)\leq m\left(\bigcup_{k=N}^{\infty}E_k\right)\leq\sum_{k=N}^{\infty}m(E_k)$，$N\to\infty$时$m(E_k)\to 0$.

Prop. Cantor集测度为0.

可测集族的基数为$2^c=2^{\aleph}$